Задание № 5

Задача 1

Сократите дробь $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}$.

Решение.

Разложим числитель дроби на множитель, для чего прибавим и вычтем x^4 и воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2) =$$
$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Аналогично преобразуем выражение $x^4 + x^2 + 1$:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Тогда получаем

$$\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$$

Ответ. $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

Задача 2

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{(a-1)x^2+2(a+2)x+9(a-1)}{x^2-(a-6)x-5(a-1)}=0$ имеет один действительный корень.

Решение.

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2(a+2)x+9(a-1)=0,\\ x^2-(a-6)x-5(a-1)\neq 0.\end{cases}$$

Первое уравнение в системе является квадратным уравнением с параметром. Чтобы уравнение $\dfrac{(a-1)x^2+2(a+2)x+9(a-1)}{x^2-(a-6)x-5(a-1)}=0$ имело один действительный корень, система должна иметь единственное решение. Система может иметь единственное решение в двух случаях:

– первое уравнение системы имеет единственное решение, которое удовлетворяет второму неравенству системы;

– первое уравнение системы имеет два различных действительных корня, один из которых удовлетворяет второму неравенству системы, а другой не удовлетворяет второму неравенству системы.

Рассмотрим каждый из этих двух случаев.

1) Уравнение $(a-1)x^2+2(a+2)x+9(a-1)=0$ может иметь один корень в двух случаях:

1.1) $a-1=0$, $a=1$. При $a=1$ система примет вид:

$$\begin{cases}6x=0,\\ x^2+5x\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,\\ x(x+5)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,\\ 0\neq 0.\end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, при $a=1$ уравнение $\dfrac{(a-1)x^2+2(a+2)x+9(a-1)}{x^2-(a-6)x-5(a-1)}=0$ решений не имеет.

1.2) $D=0$. $\dfrac{1}{4}D=(a+2)^2-9(a-1)^2=(a+2-3(a-1))(a+2+3(a-1))=$ $=(5-2a)(4a-1)$. $D=0$ при $a=2{,}5$ или $a=\dfrac{1}{4}$.

При $a=2{,}5$ система примет вид:

$$\begin{cases}1{,}5x^2+9x+13{,}5=0,\\ x^2+3{,}5x-7{,}5\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+6x+9=0,\\ (x-1{,}5)(x+5)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+3)^2=0,\\ (x-1{,}5)(x+5)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-3,\\ -9\neq 0;\end{cases}$$

$$x=-3.$$

Система имеет единственное решение, следовательно, при $a=2{,}5$ уравнение $\dfrac{(a-1)x^2+2(a+2)x+9(a-1)}{x^2-(a-6)x-5(a-1)}=0$ имеет единственное решение.

При $a = \dfrac{1}{4}$ система примет вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{9}{2}x - \dfrac{27}{4} = 0, \\ x^2 + \dfrac{23}{4}x + \dfrac{15}{4} \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0, \\ \left(x + \dfrac{3}{4}\right)(x+5) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 0, \\ \left(x + \dfrac{3}{4}\right)(x+5) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ 30 \neq 0; \end{cases}$$

$x = 3.$

Система имеет единственное решение, следовательно, при $a = \dfrac{1}{4}$ уравнение $\dfrac{(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1)}{x^2 - (a-6)x - 5(a-1)} = 0$ имеет единственное решение.

2) Уравнение $(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1) = 0$ имеет два различных действительных корня, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-2a)(4a-1) > 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} < a < 2{,}5, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$\dfrac{1}{4} < a < 1,\ 1 < a < 2{,}5.$

Найдем, при каких значения x знаменатель дроби $x^2 - (a-6)x - 5(a-1)$ обращается в ноль.

$$x^2 - (a-6)x - 5(a-1) = 0;$$

$$(x + 5)(x - (a - 1)) = 0;$$

$$x = -5 \text{ или } x = a - 1.$$

Выясним, при каких значениях a $x = -5$ является корнем уравнения $(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1) = 0$:

$$(a-1)\cdot(-5)^2 + 2(a+2)\cdot(-5) + 9(a-1) = 0;$$
$$25a - 25 - 10a - 20 + 9a - 9 = 0;$$
$$24a - 54 = 0;$$
$$a = \frac{9}{4}.$$

$a = \frac{9}{4}$ удовлетворяет условию $1 < a < 2{,}5$, то есть при $a = \frac{9}{4}$ уравнение $(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1) = 0$ имеет два различных действительных корня, один из которых равен –5.

Выясним, при каких значениях a $x = a-1$ является корнем уравнения $(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1) = 0$:

$$(a-1)\cdot(a-1)^2 + 2(a+2)\cdot(a-1) + 9(a-1) = 0;$$
$$(a-1)\cdot(a^2 - 2a + 1 + 2a + 4 + 9) = 0;$$
$$(a-1)\cdot(a^2 + 14) = 0;$$
$$a = 1.$$

$a = 1$ не удовлетворяет условию $\frac{1}{4} < a < 1$, $1 < a < 2{,}5$, следовательно, $x = a-1$ ни при каком $a \neq 1$ не является корнем уравнения $(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1) = 0$.

Тогда при $a = \frac{9}{4}$ уравнение $(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1) = 0$ имеет два различных действительных корня, один из которых равен –5, а другой отличен от $a-1$, то есть уравнение $\frac{(a-1)x^2 + 2(a+2)x + 9(a-1)}{x^2 - (a-6)x - 5(a-1)} = 0$ имеет один действительный корень.

Ответ. $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{9}{4}$, $a = 2{,}5$.

Задача 3

Найдите множество значений функции $y = \frac{1}{x^2 + |2x-3|}$.

Решение.

Решение любой задачи, связанной с исследованием функции, начинают с нахождения области определения рассматриваемой функции. Найдем область определения функции $y = \frac{1}{x^2 + |2x-3|}$. Числитель и знаменатель дроби существуют для любого действительного значения x, следовательно, область определения функции определяется следующим условием: $x^2 + |2x-3| \neq 0$.

Так как при любом действительном x $x^2 \geq 0$ и $|2x - 3| \geq 0$, то $x^2 + |2x-3| = 0$ тогда и только тогда, когда $x^2 = 0$ и $|2x - 3| = 0$. Получили систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 0, \\ |2x-3| = 0. \end{cases}$ Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ |2x-3| = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ 2x-3 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 1{,}5. \end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, при любом действительном x $x^2 + |2x-3| \neq 0$. Таким образом, получили, что область определения функции $y = \dfrac{1}{x^2 + |2x-3|}$ совпадает со всем множеством действительных чисел.

Найдем сначала множество значений функции $g(x) = x^2 + |2x - 3|$. Раскроем модуль, получим

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 - 2x + 3, & 2x - 3 < 0; \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \geq 1{,}5, \\ x^2 - 2x + 3, & x < 1{,}5. \end{cases}$$

Найдем значения выражения $x^2 + 2x - 3$ при $x \geq 1{,}5$.

$x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4$. При $x \geq 1{,}5$ $x + 1 \geq 2{,}5$; $(x + 1)^2 \geq 6{,}25$; $(x + 1)^2 - 4 \geq 2{,}25$. Таким образом, при $x \geq 1{,}5$ $g(x) \geq 2{,}25$.

Найдем значения выражения $x^2 - 2x + 3$ при $x < 1{,}5$. $x^2 - 2x + 3 =$ $= (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2$. Так как $1 < 1{,}5$ и при $x = 1$ $(x - 1)^2$ принимает наименьшее значение, равное 0, то при $x < 1{,}5$ $(x - 1)^2 \geq 0$; $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$. Таким образом, при $x < 1{,}5$ $g(x) \geq 2$.

Так как при $x \geq 1{,}5$ $g(x) \geq 2{,}25$ а при $x < 1{,}5$ $g(x) \geq 2$, то множество значений функции $g(x)$ совпадает с полуинтервалом $[2; +\infty)$.

В силу того, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \geq 2$ принимает все значения из промежутка $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, множество значений функции $y = \dfrac{1}{g(x)}$ совпадает с полуинтервалом $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

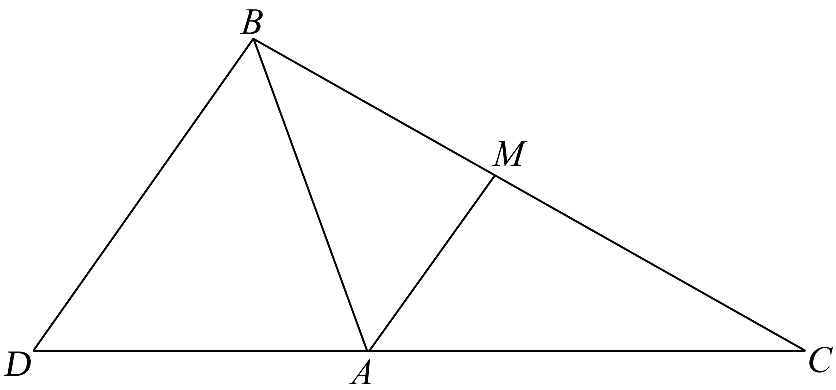
Задача 4

В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

a) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

b) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC : AB = 5 : 4$.

Решение.



а) Так как $AB = AD$, то ΔABD равнобедренный по определению, значит, $\angle ADB = \angle ABD$ по свойству.

$\angle ADB = \angle CAM$ как соответственные при $BD \parallel AM$ и секущей CD.

$\angle ABD = \angle BAM$ как накрест лежащие при $BD \parallel AM$ и секущей AB.

Так как $\angle ADB = \angle ABD$, $\angle ADB = \angle CAM$, $\angle ABD = \angle BAM$, то $\angle CAM = \angle BAM$, следовательно, AM – биссектриса $\angle BAC$, **что и требовалось доказать.**

b) $S_{AMBD} = S_{CBD} - S_{CAM}$.

Так как AM – биссектриса ΔABC, то по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BM}{MC}=\frac{BA}{AC}=\frac{4}{5}$.

ΔCBD и ΔABC имеют общую высоту, проведенную из вершины B, следовательно, $\frac{S_{CBD}}{S_{ABC}}=\frac{CD}{AC}=\frac{AD+AC}{AC}=\frac{BA}{AC}+1=\frac{4}{5}+1=\frac{9}{5}$, тогда $S_{CBD}=\frac{9}{5}S_{ABC}=\frac{9}{5}\cdot 216=388{,}8$.

ΔACB и ΔAMC имеют общую высоту, проведенную из вершины A, следовательно, $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{CM}{BC}=\frac{CM}{BM+CM}=\frac{1}{\frac{BM}{CM}+1}=\frac{1}{\frac{4}{5}+1}=\frac{1}{\frac{9}{5}}=\frac{5}{9}$, тогда $S_{AMC}=\frac{5}{9}S_{ABC}=\frac{5}{9}\cdot 216=120$.

$S_{AMBD} = S_{CBD} – S_{CAM}$ = 388,8 – 120 = 268,8.

Ответ. S_{AMBD} = 268,8.

Задача 5

В волейбольном турнире участвовало 12 команд. Оказалось, что ни одна команда не одержала ровно 5 побед. Докажите, что найдутся такие команды *A*, *B*, *C*, что команда *A* выиграла у команды *B*, команда *B* выиграла у команды *C*, команда *C* выиграла у команды *A* (ничьих в волейболе не бывает).

Решение.

Так как в турнире участвовало 12 команд, то каждая команда провела 11 игр, поэтому количество побед одной команды может изменяться от 0 (когда команда проиграла все игры) до 11 (когда команда выиграла все игры). Таким образом, возможно 12 различных значений для количества побед одной команды. По условию задачи ни одна команда не одержала ровно 5 побед, значит, остается 11 возможных различных значений для количества побед одной команды, а команд 12, следовательно, по принципу Дирихле, найдутся две команды (обозначим эти команды *A* и *B*), одержавшие в турнире одинаковое число побед. Причем, число побед команд *A* и *B* не может быть равно 0 и не может быть равно 11, так как 0 побед может одержать только одна команда, проигравшая все игры, так как у любой другой команды есть хотя бы одна победа над командой, проигравшей всем; аналогично, 11 побед может одержать только одна команда, выигравшая все игры, так как у любой другой команды есть хотя бы одно поражение от команды, выигравшей у всех.

Пусть, для определенности, команда A выиграла у команды B. Рассмотрим все команды, проигравшие команде B. Среди них есть хотя бы одна команда (обозначим ее C), которая выиграла у команды A, так как в противном случае у команды A будет хотя бы на одну победу больше, чем у команды B (команда A выиграла у всех команд, у которых выиграла команда B и еще выиграла у команды B), что противоречит выбору команд A и B с одинаковым числом побед.

Таким образом, мы нашли три команды такие, что команда A выиграла у команды B, команда B выиграла у команды C, команда C выиграла у команды A, **что и требовалось доказать.**