РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 1 ДЛЯ 9-го КЛАССА

(2022-2023 учебный год)

Задача 1

Каким числом – рациональным или иррациональным – является

$$\sqrt[3]{2022^2 + 2022 \cdot 2023 + 2023^2 + 2022^3}?$$

Найдите это число.

Решение

Обозначим $a = 2022$. Тогда

$$2022^2 + 2022 \cdot 2023 + 2023^2 + 2022^3 = a^2 + a(a+1) + (a+1)^2 + a^3 =$$

$$= a^2(a+1) + a(a+1) + (a+1)^2 = (a+1)(a^2 + 2a + 1) = (a+1)^3 = 2023^3.$$

Таким образом, данное число – это целое число 2023.

Ответ: 2023, рациональное (целое).

Задача 2

Дано квадратное уравнение $3x^2 - 5x - 1 = 0$, корни которого α и β. Не решая уравнения, составьте новое квадратное уравнение с целыми коэффициентами и корнями $\alpha^3\beta$ и $\alpha\beta^3$.

Решение

Согласно теореме Виета, для квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с корнями $\alpha^3\beta$ и $\alpha\beta^3$ справедливы равенства

$$p = -(\alpha^3\beta + \alpha\beta^3) = -\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2); q = \alpha^3\beta \cdot \alpha\beta^3 = (\alpha\beta)^4.$$

Применяя теорему Виета к исходному уравнению, получаем

$$\alpha + \beta = \frac{5}{3};\ \alpha\beta = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{25}{9} + \frac{2}{3} = \frac{31}{9}, p = \frac{31}{27}, q = \frac{1}{81}.$$

Уравнение с заданными корнями имеет вид

$$x^2 + \frac{31}{27}x + \frac{1}{81} = 0.$$

Чтобы коэффициенты уравнения были целыми, умножим обе его части на 81:

$$81x^2 + 93x + 1 = 0.$$

Ответ: $81x^2 + 93x + 1 = 0$.

Задача 3

В равнобедренный треугольник вписана окружность. Другая окружность касается основания, а её центром является точка пересечения высот. Отношение площади первого круга к площади второго равно 4. Найдите углы треугольника.

Решение

Пусть r_1 – радиус первой окружности, r_2 – радиус второй окружности. Так как площади кругов равны πr_1^2 и πr_2^2, $r_1 = 2r_2$.

Так как треугольник равнобедренный, высота BH, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой, центры обеих окружностей лежат на BH, $O_1H = r_1$, $O_2H = r_2$.

Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Обозначим $AH = a$. Тогда $BH = a\text{tg}\alpha$, $AB = BC = a/\cos\alpha$, $AC = 2a$.

Так как отрезок AO_2 лежит на высоте треугольника, $\angle AO_2H = \alpha$, $r_2 = a\text{ctg}\alpha$.

Площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2}BH \cdot AC = a^2\text{tg}\alpha.$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)r_1 = \left(\frac{a}{\cos\alpha} + a\right)2a\text{ctg}\alpha = 2a^2\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}.$$

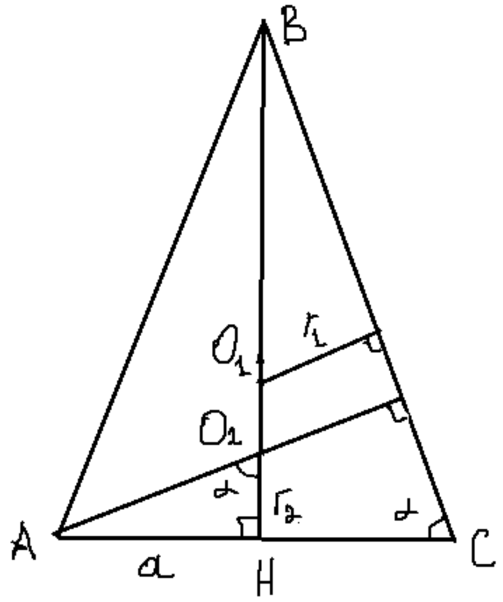
Приравнивая два выражения для площади, получаем

$$2\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha = \sin^2\alpha,$$

$$3\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0,\ \cos\alpha = 1/3.$$

Косинус угла треугольника полностью определяет этот угол.



Ответ: $\alpha, \alpha, 180^0 - 2\alpha$, где $\cos\alpha = 1/3$.

Задача 4

Поезд проходит туннель длиной 450 м за 14 сек и идёт мимо телеграфного столба 5 сек. Найдите длину поезда и его скорость.

Решение

Пусть длина поезда l м, его скорость - v м/с. По условию задачи, поезд проходит за 14 секунд расстояние 450+l метров и l метров за 5 секунд. Таким образом,

$$14v = 450 + l; 5v = l.$$

Из этой системы находим $9v = 450$, $v = 50$, $l = 250$.

Таким образом, скорость поезда – 50 м/с или 180 км/ч, длина поезда – 250 метров.

Ответ: 250 метров, 50 м/с.

Задача 5

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a - 2{,}5)x + 1 = 4|x - a|$$

имеет ровно два различных решения?

Решение

Раскроем модуль в правой части уравнения.

1 случай. $x < a$, $(a - 2{,}5)x + 1 = 4(a - x)$,

$$(a+1{,}5)x = 4a-1;\, x = \frac{4a-1}{a+1{,}5}.$$

Решим неравенство $x < a$.

$$\frac{4a-1}{a+1{,}5} < a;\ \frac{4a-1-a^2-1{,}5a}{a+1{,}5} < 0;\ \frac{a^2-2{,}5a+1}{a+1{,}5} > 0$$

$$\frac{(a-2)(a-0{,}5)}{a+1{,}5} > 0;\ -1{,}5 < a < 0{,}5 \text{ или } a > 2.$$

2 случай. $x \geq a$, $(a-2{,}5)x + 1 = 4(x-a)$,

$$(a-6{,}5)x = -4a-1;\, x = \frac{4a+1}{6{,}5-a}.$$

Решим неравенство $x \geq a$.

$$\frac{4a+1}{6{,}5-a} \geq a;\ \frac{4a+1-6{,}5a+a^2}{6{,}5-a} \geq 0;\ \frac{a^2-2{,}5a+1}{6{,}5-a} \geq 0;$$

$$a \leq 0{,}5 \text{ или } 2 \leq a < 6{,}5.$$

Таким образом, если $-1{,}5 < a < 0{,}5$ или $2 < a < 6{,}5$ уравнение имеет корни

$$x_1 = \frac{4a-1}{a+1{,}5},\, x_2 = \frac{4a+1}{6{,}5-a}.$$

Ответ: $-1{,}5 < a < 0{,}5$, $2 < a < 6{,}5$.