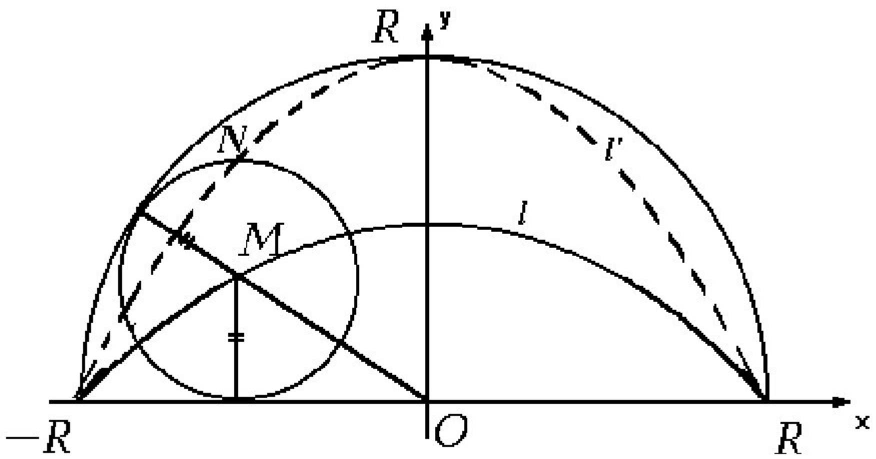
Решения задач открытой студенческой олимпиады им. Л.П. Шильникова

1. Рассматривается множество окружностей, вписанных в данный полукруг. **а)** Какую линию представляет собой множество центров вписанных окружностей? **б)** Какая из двух частей, на которые эта линия делит полукруг, имеет большую площадь?

Ответ: а) параболу; **б**) часть полукруга, прилегающая к полуокружности. **Решение. а)** Введем декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с центром полукруга, а ось Ох шла вдоль его диаметра. Пусть R – радиус полукруга и $M(x,y)$ – центр некоторой вписанной окружности (см. рис.). Тогда радиус этой окружности равен, с одной стороны, расстоянию от M до диаметра полукруга, а с другой – расстоянию от M до точки касания с исходной полуокружностью. Таким образом, $y = R - \sqrt{x^2+y^2}$(здесь учтено то, что точка касания окружностей и их центры O и $\boldsymbol{M}$ лежат на одной прямой). Отсюда $(y-R)^2 = x^2 + y^2$, т.е. $y = \frac{R}{2} - \frac{x^2}{2R}$. Итак, искомая линия это часть параболы (внутри полукруга) с вершиной в точке $\left(0, \frac{R}{2}\right)$ и с ветвями, направленными вниз. **б)** Ответить на второй вопрос нетрудно, вычислив площади частей с помощью интегрирования. Однако еще проще решить этот вопрос, рассуждая так: для каждой вписанной окружности с центром $M(x,y)$ рассмотрим точку $N(x,2y)$ – верхнюю точку этой окружности. Пусть множество точек N образует линию l' (очевидно, тоже параболу). Площадь под l' вдвое больше площади под l, т.к. ординаты l' вдвое больше ординат l для тех же абсцисс. Поэтому площадь под l равна площади между l и l'. Значит, больше площадь у той части полукруга, которая выше l.



2. Вычислите определённый интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} \mathrm{d}x$.

Ответ: 0. **Решение**. Подынтегральная функция $y(x)$ позволяет найти неопределенный интеграл (т.е. выразить его в виде элементарной функции – например, с помощью подстановок Эйлера, тригонометрических или гиперболических подстановок). Однако проще доказать нулевое значение определенного интеграла с симметричными пределами интегрирования, если проверить нечетность функции $y(x)$. Заметим, что в выражении $y(x)$ знаменатель положителен при всех x, т.к. $\sqrt{x^2+1} > |x|$. Таким образом, функция $y(x)$ непрерывна и поэтому интегрируема на отрезке. Преобразуем $y(x)$, домножив числитель и знаменатель на множитель $\sqrt{x^2+1} - (x+1)$. Заметим, что этот множитель равен нулю лишь при x=0 : действительно, если $\sqrt{x^2+1} = x+1$, то $x^2+1 = x^2+2x+1 \Rightarrow x = 0$. После домножения знаменатель будет равен $(-2x)$, а числитель $2(1-\sqrt{x^2+1})$. Таким образом, при $x \neq 0$ имеем $y = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$. Очевидно, эта функция нечётная (а при x = 0 исходное выражение принимает значение $y(0)$=0).

3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$ сходится и найдите его сумму.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$. **Решение**. Сходимость данного положительного ряда следует из признака сравнения со сходящимся обобщенным гармоническим рядом с общим членом $\frac{1}{n^2}$, т. к. бесконечно малые $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$ и $\frac{1}{2n^2}$ эквивалентны. Далее, можно заметить, а затем доказать по индукции, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \dots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Действительно, шаг индукции заключается в доказательстве тождества

$$\operatorname{arctg}\frac{n-1}{n} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Для этого в равносильном равенстве $\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$ возьмёт тангенсы от обеих частей, используя формулу тангенса разности. Это также приведет к равносильному равенству, т.к. в обеих частях углы принадлежат первой четверти. Таким образом, приходим к очевидному равенству $\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) : \left(1 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}$.

4. Даны квадратные матрицы A и B одного порядка с действительными элементами, удовлетворяющие при некотором натуральном n соотношению $(A+B)^n = O$(нулевая матрица). Известно, что матрица B невырожденная. **а**) Докажите, что если A и B коммутируют, то матрица A тоже невырожденная; **б**) справедливо ли утверждение п. **а**) без условия коммутирования?

Ответ: б) несправедливо. **Решение. а)** Если A и B коммутируют, то для $(A+B)^n$ имеет место формула бинома Ньютона: действительно, при доказательстве бинома используются обычные законы сложения и умножения – ассоциативность, дистрибутивность, коммутативность, а для действий с произвольными матрицами все законы, кроме коммутативности умножения, выполняются. Таким образом, в условиях п. **а**) имеем

$$A^n + C_n^1 A^{n-1} B + \dots + C_n^{n-1} A B^{n-1} + B^n = O \Leftrightarrow A(A^{n-1} + C_n^1 A^{n-2} B + \dots + C_n^{n-1} B^{n-1}) = -B^n.$$

В правой части последнего равенства стоит невырожденная матрица, что следует, например, из свойства определителя произведения матриц. Из того же свойства следует, что и множитель A в левой части не может иметь нулевой определитель.

б). Можно привести такой контрпример для матриц второго порядка:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O$.

5. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ два числа $(n-2)!$ и НОД$(n, (n-2)!)$ сравнимы по модулю n.

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда число n составное: $n = ab$, где $a > 1$, $b > 1$. Если a b, то a и b являются разными множителями в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) = (n-2)!$, и поэтому $(n-2)!$ делится на n. Тогда НОД$(n, (n-2)!) = n$, и утверждение доказано. Если $a = b > 2$, то числа a и $2a$ являются множителями в произведении $(n-2)!$, и поэтому $(n-2)!$ делится на n. Если же $a = b = 2$, то $n = 4$, НОД$(n, (n-2)!) = 2$, и значит, $(n-2)! -$ НОД$(n, (n-2)!) = 0$ (т.е делится на 4).

Пусть теперь n – простое число, тогда НОД$(n, (n-2)!) = 1$. По теореме Вильсона (для простого n) имеем $(n-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, n)$. Отсюда следует, в силу сравнения $(n-1)$ $-1 \ (\mathrm{mod}\ n)$, что $(n-2)!$ $1 (\mathrm{mod}\ n)$. Таким образом, $(n-2)!$ $1 (\mathrm{mod}\ n)$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Утверждение теоремы Вильсона (для простого n) следует, например, из теоремы Виета для свободного члена уравнения $x^{n-1} - 1 = 0$ в поле вычетов по модулю n. Корнями этого уравнения являются все числа 1, 2, …, $n-1$, что, в свою очередь, следует из малой теоремы Ферма.

6. Представьте 30 в виде суммы нескольких положительных чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.

Ответ:$30 = \frac{30}{11} + \frac{30}{11} + \ldots + \frac{30}{11}$ (11 одинаковых слагаемых). **Решение**. Пусть $x_1 + \ldots + x_n = 30$ ($n \in N$, $x_i > 0$, $i = 1 \ldots n$). Из неравенства о средних (арифметическом и геометрическом) следует, что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \le \left(\frac{30}{n}\right)^n$, причем равенство достигается лишь при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{30}{n}$. Значит, все слагаемые в искомом представлении должны быть одинаковыми и равными $\frac{30}{n}$. Исследуем функцию $f(x) = \left(\frac{30}{x}\right)^x$ при $x > 0$ с помощью производной. Прологарифмировав обе части выражения для $f(x)$ и взяв производную, будем иметь $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(\frac{30}{x}\right) - 1$. Отсюда следует, что положительная функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\left(0, \frac{30}{e}\right)$, убывает на промежутке $\left(\frac{30}{e}, +\infty\right)$ и достигает наибольшего значения при $x = \frac{30}{e}$. Поскольку $\frac{30}{12} < e < \frac{30}{11}$, искомое ***n*** равно либо 11, либо 12. Покажем, что $\left(\frac{30}{11}\right)^{11} > \left(\frac{30}{12}\right)^{12}$. Действительно, $\left(\frac{30}{11}\right)^{11} > \left(\frac{30}{12}\right)^{12} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{11}\right)^{11} > 2{,}5$, а последнее неравенство можно проверить с помощью бинома Ньютона: $\left(1 + \frac{1}{11}\right)^{11} > 1 + 11 \cdot \frac{1}{11} + \frac{11 \cdot 10}{2}\left(\frac{1}{11}\right)^2 + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6}\left(\frac{1}{11}\right)^3 > 2{,}5$.

7. Рассматривается множество кубов в $\boldsymbol{R}^3$, у которых все вершины имеют целочисленные координаты и ни одно ребро не параллельно координатным осям. **а**) Докажите, что это множество непусто. **б**) Докажите, что длина ребра любого куба из этого множества – целое число. **в**) Обобщите утверждение п. **б**) для пространства $\boldsymbol{R}^{2n+1}$.

Решение. а) Рассмотрим в координатном пространстве куб, у которого одна из вершин находится в начале координат, а три вектора-ребра, выходящие из этой вершины – это $\vec{a} = (2, 2, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, -2, 2)$. Непосредственно проверяется, что эти векторы с целыми координатами взаимно перпендикулярны (т.к. все скалярные произведения равны нулю), а длина каждого из них равна 3.

б). Пусть d – длина ребра куба из данного множества. Заметим, что объём куба – число целое, равное модулю определителя, составленного из координат трёх векторов-ребер, выходящих из одной вершины куба (это верно и для любого параллелепипеда). Таким образом, d^3 – целое число. Площадь грани куба равна d^2 и поэтому это тоже целое число (как квадрат длины вектора с целыми координатами). Таким образом, $d = d^3/d^2$– число рациональное. Но поскольку d^3 – целое число, то и число d должно быть целым.

в). Доказательство фактически не отличается от доказательства п. **б**). Тот факт, что ($2n$+1)-мерный объём параллелепипеда равен модулю определителя матрицы, составленной из координат векторов-ребер, выходящих из одной вершины, – это известный результат теории функций нескольких переменных, который получается при замене переменных в кратном интеграле (переход от стандартного репера к базису из ($2n$+1) векторов-ребер, выходящих из вершины параллелепипеда, осуществляется при помощи той самой матрицы, определитель которой есть якобиан преобразования перехода). Рациональность длины ребра d получается из аналогичного равенства $d = d^{2n+1}/d^{2n} = d^{2n+1}/((d^2)^n)$, а последний момент (про целое значение d) – тот же самый, что в п. **б**).