Задание № 3

Задача 1

Зная, что $x = 9^{2020} + 2$, установите, являются ли взаимно простыми числа $x^3 + 1$ и $x^2 + 2$.

Решение

Обозначим, $a = 9^{2020}$, тогда $x^3 + 1 = (a + 2)^3 + 1 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + 1 = a(a^2 + 6a + 12) + 9$. Так как $a = 9^{2020}$, то a делится на 3 и 9 делится на 3, следовательно, $x^3 + 1$ делится на 3.

$x^2 + 2 = (a + 2)^2 + 2 = a^2 + 4a + 4 + 2 = a(a + 4) + 6$. Так как a делится на 3 и 6 делится на 3, то и $x^2 + 2$ делится на 3.

Таким образом, числа $x^3 + 1$ и $x^2 + 2$ при $x = 9^{2020} + 2$ имеют общий делитель, равный 3, следовательно, взаимно простыми не являются.

Ответ. Не являются.

Задача 2

При каких натуральных значениях n дробь $\frac{n^2+16n}{9n+60}$ является правильной и несократимой? Укажите все такие дроби.

Решение

Так как n – число натуральное, то числитель и знаменатель дроби $\frac{n^2+16n}{9n+60}$ являются числами положительными, поэтому, для того, чтобы дробь $\frac{n^2+16n}{9n+60}$ была правильной, числитель должен быть меньше знаменателя, то есть

$$n^2 + 16n < 9n + 60;$$
$$n^2 + 7n - 60 < 0;$$
$$n^2 + 12n - 5n - 60 < 0;$$
$$n(n + 12) - 5(n + 12) < 0;$$
$$(n + 12)(n - 5) < 0.$$

Так как n – число натуральное, то $n + 12$ является числом положительным, следовательно, произведение $(n + 12)(n - 5)$ будет отрицательным тогда и только тогда, когда второй множитель $n - 5$ будет отрицательным. Условию $n - 5 < 0$ удовлетворяют натуральные числа 1, 2, 3 и 4.

Если n – число четное, то $n^2 + 16n$ и $9n + 60$ будут четными, следовательно, дробь $\frac{n^2+16n}{9n+60}$ является сократимой.

Если $n = 3$, то $n^2 + 16n$ и $9n + 60$ будут кратны 3, следовательно, дробь $\frac{n^2+16n}{9n+60}$ является сократимой.

При $n = 1$ $\frac{n^2+16n}{9n+60} = \frac{1+16}{9+60} = \frac{17}{69}$, а дробь $\frac{17}{69}$ несократима.

Ответ. При $n = 1$ дробь $\frac{17}{69}$ несократима.

Задача 3

Решите уравнение

$$(2x^2 - 5x + 3)^8 + (2x^2 + x - 6)^2(2x^2 - 5x + 3)^2 + (2x^2 + x - 6)^6 = 0.$$

Решение

Так как четная степень выражения может принимать только неотрицательные значения, то в левой части уравнения стоит сумма трех неотрицательных слагаемых. Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю, а натуральная степень выражения равна нулю тогда и только тогда, когда само это выражение равно нулю, следовательно, уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0, \\ 2x^2 + x - 6 = 0. \end{cases}$$

Решим каждое уравнение системы.

$$2x^2 - 5x + 3 = 0;$$
$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0;$$
$$2x(x-1) - 3(x-1) = 0;$$
$$(x-1)(2x-3) = 0;$$
$$x = 1 \text{ или } x = 1{,}5.$$

$$2x^2 + x - 6 = 0;$$
$$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0;$$
$$2x(x+2) - 3(x+2) = 0;$$
$$(x+2)(2x-3) = 0;$$
$$x = -2 \text{ или } x = 1{,}5.$$

Таким образом, система примет вид

$$\begin{cases} x = 1,\ x = 1{,}5, \\ x = -2,\ x = 1{,}5. \end{cases}$$

Решением системы является $x = 1{,}5$.

Ответ. $x = 1{,}5$.

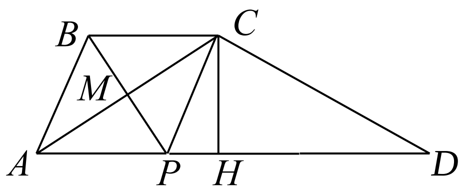
Задача 4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 120, а основание AD трапеции втрое больше другого основания. Отрезок, соединяющий точку P основания AD с вершиной B, пересекается с диагональю AC трапеции в точке M, точка P делит основание AD в отношении 1 : 2. Найдите площадь четырехугольника $CMPD$.

Решение

Так как в условии задачи не указано, от какого конца отрезка AD считается отношение, в котором точка P делит отрезок AD, то возможно 2 случая:

1) $AP:PD = 1:2$;
2) $AP:PD = 2:1$.



<u>1 случай.</u> $AP:PD = 1:2$.

Так как $AD = 3BC$ и $AP:PD = 1:2$, то $PD = 2AP$ и $AD = 3AP$, то есть $AP = BC$.

BC и AD – основания трапеции $ABCD$, следовательно, $BC \parallel AD$.

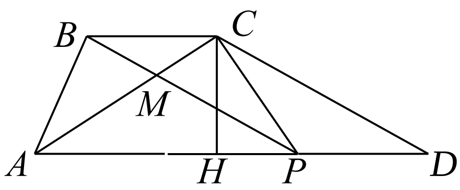
Так как $AP = BC$ и $BC \parallel AP$, то $ABCP$ – параллелограмм (по признаку), M – точка пересечение диагоналей параллелограмма $ABCP$, значит, $S_{CPM} = \frac{1}{4} S_{ABCP}$.

Проведем высоту CH трапеции $ABCD$.

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{BC + 3BC}{2} \cdot CH = 2BC \cdot CH = 120$, значит, $BC \cdot CH = 60$.

$S_{ABCP} = AP \cdot CH = BC \cdot CH = 60$, следовательно, $S_{CPM} = \frac{1}{4} S_{ABCP} = \frac{60}{4} = 15$.

$S_{PCD} = \frac{1}{2} PD \cdot CH = \frac{1}{2} 2AP \cdot CH = BC \cdot CH = 60$, тогда $S_{CMPD} = S_{PCD} + S_{CPM} = 60 + 15 =$ $= 75$.



<u>2 случай.</u> $AP:PD = 2:1$.

Так как $AD = 3BC$ и $AP:PD = 2:1$, то $AP = 2PD$ и $AD = 3PD$, то есть $AP = 2BC$.

Проведем высоту CH трапеции $ABCD$.

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{BC + 3BC}{2} \cdot CH =$

$= 2BC \cdot CH = 120$, значит, $BC \cdot CH = 60$.

$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CH = \frac{1}{2} 3BC \cdot CH = 1{,}5BC \cdot CH = 1{,}5 \cdot 60 = 90$.

Рассмотрим ΔBCM и ΔPAM. $\angle MBC = \angle MPA$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BP, $\angle MCB = \angle MAP$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC, следовательно, $\Delta BCM \sim \Delta PAM$ по двум углам, значит,
$\frac{BC}{AP} = \frac{CM}{AM} = \frac{BM}{MP} = \frac{1}{2}$, $\frac{S_{BCM}}{S_{PAM}} = \frac{1}{4}$, то есть $S_{PAM} = 4S_{BCM}$.

Так как ΔBCM и ΔABM имеют общую высоту, проведенную из вершины B, и $\frac{CM}{AM} = \frac{1}{2}$, то $\frac{S_{BCM}}{S_{BAM}} = \frac{CM}{AM} = \frac{1}{2}$, значит, $S_{BAM} = 2S_{BCM}$. Аналогично, $S_{PCM} = 2S_{BCM}$.

$ABCP$ – трапеция с основаниями AP и BC и высотой CH, тогда
$S_{ABCP} = \frac{BC + AP}{2} \cdot CH = \frac{BC + 2BC}{2} \cdot CH = 1{,}5BC \cdot CH = 1{,}5 \cdot 60 = 90$. С другой стороны $S_{ABCP} = S_{BAM} + S_{BCM} + S_{PCM} + S_{PAM} = 2S_{BMC} + S_{BCM} + 2S_{BMC} + 4S_{BMC} =$ $= 9S_{BMC}$, значит, $9S_{BMC} = 90$, $S_{BMC} = 10$, $S_{PAM} = 4S_{BCM} = 4 \cdot 10 = 40$.

Тогда $S_{CMPD} = S_{ACD} - S_{PAM} = 90 - 40 = 50$.

Ответ. 75 или 50.

Задача 5

Три супружеских пары покупали вещи на ярмарке. Каждый из этих шести человек уплатил за каждую купленную вещь столько сотен рублей, сколько вещей купил. При этом каждый муж истратил на 4500 рублей меньше своей жены. Известно, что Николай купил на 17 вещей меньше Анны, Петр –на 7 вещей меньше Надежды. Сколько вещей купил Василий? Сколько вещей купила Галина? Кто на ком был женат?

Решение

Пусть жена купила x вещей, а ее муж –y вещей, тогда за каждую вещь жена заплатила $100x$ рублей, а ее муж – $100y$ рублей, значит, жена потратила на все покупки $x \cdot 100x = 100x^2$ (руб), а ее муж – $y \cdot 100y = 100y^2$(руб). Так как муж по условию задачи потратил на покупки на 4500 рублей меньше своей жены, то $x > y$ и $100x^2 - 100y^2 = 4500$, значит, $x^2 - y^2 = 45$. Решим в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 45$.

$$x^2 - y^2 = 45;$$

$$(x - y)(x + y) = 45.$$

45 в виде произведения натуральных чисел можно представить тремя способами: $45 = 1 \cdot 45 = 3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$. Так как x и y – натуральные числа, то $x + y > x - y$, следовательно, получаем три системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 45; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 46, \\ 2y = 44; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 18, \\ 2y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 14, \\ 2y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 23, \\ y = 22. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9, \\ y = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют три пары натуральных значений x и y: 7 и 2; 9 и 6; 23 и 22.

Количество вещей, купленных Николаем, может быть 2, 6 или 22, но 2 + 17 = 19, а 22 + 17 = 39, 19 и 39 не совпадают с количеством вещей, купленных женщинами: 7, 9 или 23, значит, Николай купил 6 вещей, а Анна – 6 + 17 = 23 (вещи). Числа 6 и 23 из разных пар решений уравнения $x^2 - y^2 = 45$, следовательно, Николай и Анна супругами не являются.

Количество вещей, купленных Петром, может быть 2 или 22, но 22 + 7 = 29, 29 не совпадают с количеством вещей, купленных женщинами: 7, 9 или 23, значит, Петр купил 2 вещи, а Надежда – 2 + 7 = 9 (вещей). Числа 2 и 9 из разных пар решений уравнения $x^2 - y^2 = 45$, следовательно, Петр и Надежда супругами не являются, а так как числа 2 и 23 также из разных пар решений уравнения $x^2 - y^2 = 45$, то Петр и Анна супругами не являются. Таким образом, Петр женат на Галине и Галина купила 7 вещей.

Николай купил 6 вещей, Надежда купила 9 вещей, числа 6 и 9 совпадают с одной из пар решений уравнения $x^2 - y^2 = 45$, следовательно, Николай женат на Надежде. Тогда Василий женат на Анне, Василий купил 22 вещи.

Ответ. Василий купил 22 вещи, Галина купила 7 вещей, Петр женат на Галине, Николай – на Надежде, Василий – на Анне.