Задание № 3

Задача 1

Андрей бегает на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и остановились в момент, когда все трое снова оказались в одном месте. За это время Женя обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было обгонов? (Ответ обосновать.)

Решение

Так как Женя, до момента встречи всех трех мальчиков, обогнал Витю 13 раз, то он проехал на 14 кругов больше, чем Витя. Пусть путь, пройденный Витей до момента остановки, равен x, а длина круговой дорожки, по которой мальчики бегут на лыжах, равна y, тогда пусть, пройденный Женей до момента остановки, равен $x + 14y$.

Пусть до момента остановки Андрей обогнал Витю m раз, $0 \le m < 13$ (так как Андрей бегает на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени). Тогда Андрей пробежал на лыжах на $(m + 1)$ круг больше, чем Витя, то есть пусть, пройденный Андреем до момента остановки, равен $x + (m + 1)y$.

Пусть, пройденный Женей до момента остановки больше пути, пройденным Андреем до момента остановки на $(x + 14y) – (x + (m + 1)y) =$ $= (14 – m – 1)y = (13 – m)y$, то есть Женя пробежал на $13 – m$ кругов больше, чем Андрей, а, следовательно, обогнал Андрея $13 – m – 1 = 12 – m$ раз.

Таким образом, общее число обгонов равно $13 + m + (12 – m) = 25$.

Ответ. 25 обгонов.

Задача 2

Сложили все четырехзначные числа, полученные из числа 2319 перестановками его цифр (включая и само число). Докажите, что полученная сумма не делится нацело на 111.

Решение

Так как все цифры числа 2319 различны и среди них нет нуля, то составляя четырехзначные числа из цифр 1, 2, 3, 9 цифру на первое место можно выбрать 4-мя способами, на второе место – тремя способами, на третье место – двумя способами и на четвертое место – одним способом. Таким образом, из числа 2319 перестановками его цифр (включая и само это число) можно составить

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ четырехзначных числа, причем, каждая из цифр в этих числах будет встречаться ровно шесть раз в каждом из разрядов: единиц, десятков, сотен и тысяч. Тогда сумма всех четырехзначных чисел, составленных из цифр числа 2319, будет равна

$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 9)(1000 + 100 + 10 + 1) = 6 \cdot 15 \cdot 1111 = 90 \cdot 1111 = 99990.$$

1 способ. $99990 = 99900 + 90 = 111 \cdot 900 + 90$, то есть, остаток от деления 99990 на 111 равен 90, следовательно, 99990 на 111 не делится нацело.

2 способ. Для исследования делимости числа 99990 на 111 можно воспользоваться признаком делимости на 111: натуральное число делится на 111 тогда и только тогда, когда на 111 делится сумма трехциферных граней этого числа. Для числа 99990 трехциферными гранями являются 990 и 99, $990 + 99 = 1089$, для числа 1089 трехциферными гранями являются 89 и 1, $89 + 1 = 90$, 90 не делится нацело на 111, следовательно, 1089 не делится нацело на 111, а, значит, и 99990 не делится нацело на 111, что и требовалось доказать.

Задача 3

Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 60%, а во втором — 45% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 55% меди?

Решение

Пусть масса первого сплава, взятого для получения нового сплава, равна x, а второго – y, тогда масса нового сплава будет равна $x + y$. Так как в первом сплаве содержится 60% меди, а во втором – 45%, то масса меди в первом сплаве равна $0{,}6x$, а во втором – $0{,}45y$, следовательно, масса меди в новом сплаве будет равна $0{,}6x + 0{,}45y$. С другой стороны, в новом сплаве содержится 55% меди, то есть масса меди в новом сплаве равна $0{,}55(x + y)$. Получили уравнение:

$$0{,}6x + 0{,}45y = 0{,}55(x + y);$$
$$0{,}6x + 0{,}45y = 0{,}55x + 0{,}55y;$$
$$0{,}6x - 0{,}55x = 0{,}55y - 0{,}45y;$$
$$0{,}05x = 0{,}1y;$$
$$x = 2y.$$

Таким образом, для получения сплава с содержанием меди 55% нужно сплава с содержанием меди 60% взять в два раза больше, чем сплава с содержанием меди 45%.

Ответ. Сплавы с содержанием меди 60% и 45% нужно взять в отношении 2:1.

Задача 4

Существует ли натуральное число, которое уменьшается в 2020 раз при зачеркивании первой цифры его десятичной записи? (Ответ обосновать.)

Решение

Пусть a – $(n + 1)$-значное натуральное число, x – первая цифра числа a, y – натуральное число, которое получается из числа a зачеркиванием его первой цифры x. Тогда $a = x \cdot 10^n + y$. Пусть число a уменьшается в 2020 раз при зачеркивании первой цифры x его десятичной записи, то есть

$$x \cdot 10^n + y = 2020 \cdot y;$$

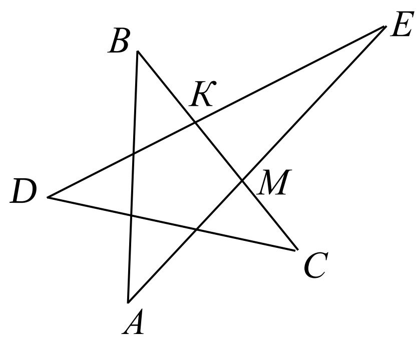
$$x \cdot 10^n = 2019 \cdot y.$$

Разложим 2019 на простые множители: $2019 = 3 \cdot 673$. Так как в разложении правой части равенства $x \cdot 10^n = 2019 \cdot y$ на простые множители присутствует простое число 673, то, в силу основной теоремы арифметики, в разложении левой части этого равенства на простые множители тоже должен присутствовать простой множитель 673. Так как $10 = 2 \cdot 5$, то 10^n и 673 являются взаимно простыми, значит, на 673 должен делиться множитель x левой части равенства $x \cdot 10^n = 2019 \cdot y$. Но по условию задачи x – первая цифра числа a, то есть $x \leq 9$, следовательно, x не делится нацело на 673. Получили противоречие. Значит, не существует натурального числа, которое уменьшается в 2020 раз при зачеркивании первой цифры его десятичной записи.

Ответ. Не существует.

Задача 5

В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, $AB = CD$. Докажите, что $AE = DE$.



Решение

<u>1 способ.</u> Обозначим, M – точка пересечения BC и AE, K – точка пересечение BC и ED.

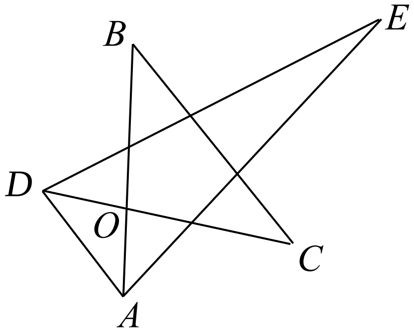
Рассмотрим ΔABM и ΔDCK. По условию $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, $AB = CD$, значит, $\Delta ABM = \Delta DCK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $AM = DK$, $\angle AMB = \angle DKC$.

$\angle AMB + \angle KME = 180°$ как смежные, значит, $\angle KME = 180° - \angle AMB$. Аналогично, $\angle MKE = 180° - \angle DKC$. Так как $\angle AMB = \angle DKC$, то $\angle KME = \angle MKE$.

Рассмотрим ΔEKM. Так как $\angle KME = \angle MKE$, то ΔEKM – равнобедренный (по признаку), следовательно, $EK = EM$.

Так как $AM = DK$ и $EK = EM$, то $AE = AM + ME = DK + KE = DE$, что и требовалось доказать.

<u>2 способ.</u> Обозначим, O – точка пересечения AB и CD, проведем отрезок DA.



Рассмотрим ΔBOC. Так как по условию $\angle B = \angle C$, то ΔBOC – равнобедренный (по признаку), следовательно, $BO = CO$.

Так как $AB = CD$ (по условию) и $BO = CO$, то $AO = AB - BO = = CD - CO = DO$, следовательно, ΔDOA – равнобедренный (по определению), значит, $\angle OAD = \angle ODA$ (по свойству).

Рассмотрим ΔDEA. $\angle EDC = \angle EAB$ (по условию), $\angle OAD = \angle ODA$, тогда $\angle EDA = \angle EDC + \angle ODA = \angle EAB + \angle OAD = \angle EAD$, следовательно, ΔDEA – равнобедренный (по признаку), значит, $AE = DE$, что и требовалось доказать.