8 класс **2019-2020 г.**

Задание № 2

Задача 1

Числа p, $4p^2+1$ и $6p^2+1$ являются простыми. Найдите p.

Решение

Так как p – простое число, то $p > 1$, следовательно, $4p^2+1 > 5$ и $6p^2+1 > 5$.

Для решения задачи воспользуемся методом перебора остатков. Рассмотрим все возможные остатки от деления на 5. При делении на 5 возможны пять различных остатков: 0, 1, 2, 3 и 4.

Пусть p при делении на 5 имеет остаток 1, то есть $p = 5m + 1$, где m – число натуральное. Тогда $4p^2 + 1 = 4\cdot(5m + 1)^2 + 1 = 4\cdot(25m^2 + 10m + 1) + 1 = 100m^2 + {}$ ${} + 40m + 5 = 5\cdot(20m^2 + 8m + 1)$, то есть $4p^2+1$ делится на 5 и, так как $4p^2+1 > 5$, $4p^2+1$ является составным, что противоречит условию задачи, следовательно, искомое простое число p при делении на 5 не может иметь остатка 1.

Пусть p при делении на 5 имеет остаток 2, то есть $p = 5m + 2$, где m – число натуральное или 0. Тогда $6p^2 + 1 = 6\cdot(5m + 2)^2 + 1 = 6\cdot(25m^2 + 20m + 4) + 1 =$ $= 150m^2 + 120m + 25 = 5\cdot(30m^2 + 24m + 5)$, то есть $6p^2+1$ делится на 5 и, так как $6p^2+1 > 5$, $6p^2+1$ является составным, что противоречит условию задачи, следовательно, искомое простое число p при делении на 5 не может иметь остатка 2.

Пусть p при делении на 5 имеет остаток 3, то есть $p = 5m + 3$, где m – число натуральное или 0. Тогда $6p^2 + 1 = 6\cdot(5m + 3)^2 + 1 = 6\cdot(25m^2 + 30m + 9) + 1 =$ $= 150m^2 + 180m + 55 = 5\cdot(30m^2 + 36m + 11)$, то есть $6p^2+1$ делится на 5 и, так как $6p^2+1 > 5$, $6p^2+1$ является составным, что противоречит условию задачи, следовательно, искомое простое число p при делении на 5 не может иметь остатка

3.

Пусть p при делении на 5 имеет остаток 4, то есть $p = 5m + 4$, где m – число натуральное. Тогда $4p^2 + 1 = 4\cdot(5m + 4)^2 + 1 = 4\cdot(25m^2 + 40m + 16) + 1 = 100m^2 + {}$ $+ 160m + 65 = 5\cdot(20m^2 + 32m + 13)$, то есть $4p^2+1$ делится на 5 и, так как $4p^2+1 > 5$, $4p^2+1$ является составным, что противоречит условию задачи, следовательно, искомое простое число p при делении на 5 не может иметь остатка 4.

Таким образом, искомое простое число p при делении на 5 может иметь только один остаток – 0, то есть, если есть простое число p, удовлетворяющее условию задачи, то им может быть только $p = 5$. При $p = 5$ $4p^2 + 1 = 101$, $6p^2 + 1 = 151$, числа 101 и 151 являются простыми, то есть для $p = 5$ условие задачи выполняется.

Ответ. $p = 5$.

Задача 2

Решите уравнение $\left|4{,}5x^2 - 12x + 8\right| = \left|\frac{32}{3} - 6x^2\right|$.

Решение

Разложим на множители выражения, стоящие под знаком модулей.

$$4{,}5x^2 - 12x + 8 = 0{,}5\cdot(9x^2 - 24x + 16) = 0{,}5\cdot(3x-4)^2;$$

$$\frac{32}{3} - 6x^2 = \frac{2}{3}\cdot(16 - 9x^2) = \frac{2}{3}\cdot(4-3x)\cdot(4+3x).$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left|0{,}5\cdot(3x-4)^2\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot(4-3x)\cdot(4+3x)\right|.$$

Преобразуем уравнение, используя свойства модуля: $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$, $|-a| = |a|$. Получим

$$\left|0{,}5\cdot(3x-4)\right|\cdot\left|3x-4\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot(4+3x)\right|\cdot\left|4-3x\right|;$$

$$\left|0{,}5\cdot(3x-4)\right|\cdot\left|3x-4\right| - \left|\frac{2}{3}\cdot(4+3x)\right|\cdot\left|3x-4\right| = 0.$$

Вынесем общий множитель за скобку, получим

$$\left(\left|0{,}5\cdot(3x-4)\right|-\left|\frac{2}{3}\cdot(4+3x)\right|\right)\cdot\left|3x-4\right|=0.$$

Получили, что произведение двух множителей равно 0, причем оба множителя существуют при любых действительных значениях x. Значит, корнями уравнения будут те значения x, при которых один из множителей равен нулю:

$$\left|0{,}5\cdot(3x-4)\right|-\left|\frac{2}{3}\cdot(4+3x)\right|=0 \qquad \text{или} \qquad \left|3x-4\right|=0,$$

$$\left|0{,}5\cdot(3x-4)\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot(4+3x)\right|, \qquad\qquad 3x-4=0,$$

$$0{,}5\cdot(3x-4)=\frac{2}{3}\cdot(4+3x) \quad \text{или} \quad 0{,}5\cdot(3x-4)=-\frac{2}{3}\cdot(4+3x), \qquad x=\frac{4}{3}.$$

$$\frac{3}{2}x-2=\frac{8}{3}+2x, \qquad\qquad \frac{3}{2}x-2=-\frac{8}{3}-2x,$$

$$\frac{1}{2}x=-\frac{14}{3}, \qquad\qquad \frac{7}{2}x=-\frac{2}{3},$$

$$x=-\frac{28}{3}. \qquad\qquad x=-\frac{4}{21}.$$

Ответ. $x=-\frac{28}{3}$, $x=-\frac{4}{21}$, $x=\frac{4}{3}$.

Задача 3

Докажите, что при любых значениях x и y справедливо следующее неравенство: $3x^2 + y^2 + 8x + 4y - 2xy + 22 \geq 0$. Укажите значения x и y, при которых справедливо равенство.

Решение

Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства.

$$3x^2 + y^2 + 8x + 4y - 2xy + 22 = (y^2 - 2xy + x^2) + 2x^2 + 8x + 4y + 22 =$$

$$= (y-x)^2 + 4y - 4x + 4 + 2x^2 + 12x + 18 =$$

$$= ((y-x)^2 + 4\cdot(y-x) + 4) + 2\cdot(x^2 + 6x + 9) = (y - x + 2)^2 + 2\cdot(x+3)^2.$$

Таким образом, исходное неравенство принимает вид

$$(y - x + 2)^2 + 2\cdot(x + 3)^2 \geq 0.$$

Так как квадрат любого действительного числа неотрицателен и сумма двух неотрицательных чисел неотрицательна, то неравенство $(y - x + 2)^2 + 2\cdot(x + 3)^2 \geq 0$ справедливо при любых действительных значениях x и y.

Найдем значения x и y, при которых справедливо равенство

$$(y - x + 2)^2 + 2\cdot(x + 3)^2 = 0.$$

Сумма двух неотрицательных чисел равна нули тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю, то есть искомые значения x и y являются решением системы

$$\begin{cases} (y - x + 2)^2 = 0, \\ 2\cdot(x+3)^2 = 0. \end{cases}$$

Так как квадрат числа равен нулю тогда и только тогда, когда само число рано нулю, то система уравнений примет вид

$$\begin{cases} y - x + 2 = 0, \\ x + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ x = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ y = -5. \end{cases}$$

Ответ. Равенство справедливо при $x = -3$, $y = -5$.

Задача 4

Перед началом учебного года мать купила школьникам тетради. Старшему сыну она отдала тетрадь и треть остатка. Среднему – одну тетрадь и треть нового остатка. Младшему – одну тетрадь и треть очередного остатка. После этого в запасе осталось от 10 до 20 тетрадей. Сколько было куплено тетрадей.

Решение

<u>1 способ.</u> Пусть у мамы осталось x тетрадей, по условию задачи $10 \leq x \leq 20$. Так как x тетрадей составляют $\frac{2}{3}$ последнего остатка, то x – число четное, то есть x может принимать одно из значений 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Если $x = 10$, то последний остаток равен $x:2\cdot3 = 10:2\cdot3 = 15$ (тетрадей), следовательно, после того, как мама отдала тетради среднему сыну, у нее осталось $15 + 1 = 16$ (тетрадей), что составляет $\frac{2}{3}$ предпоследнего остатка. Значит, предпоследний остаток равен $16:2\cdot3 = 24$ (тетради) и после того, как мама отдала тетради старшему сыну, у нее осталось $24 + 1 = 25$ (тетрадей), что составляет $\frac{2}{3}$ первого остатка. Так как 25 – число нечетное, то $x \neq 10$.

Если $x = 12$, то последний остаток равен $x:2\cdot3 = 12:2\cdot3 = 18$ (тетрадей), следовательно, после того, как мама отдала тетради среднему сыну, у нее осталось $18 + 1 = 19$ (тетрадей), что составляет $\frac{2}{3}$ предпоследнего остатка. Так как 19 – число нечетное, то $x \neq 12$.

Если $x = 16$, то последний остаток равен $x:2\cdot3 = 16:2\cdot3 = 24$ (тетради), следовательно, после того, как мама отдала тетради среднему сыну, у нее осталось $24 + 1 = 25$ (тетрадей), что составляет $\frac{2}{3}$ предпоследнего остатка. Так как 25 – число нечетное, то $x \neq 16$.

Если $x = 18$, то последний остаток равен $x:2\cdot3 = 18:2\cdot3 = 27$ (тетрадей), следовательно, после того, как мама отдала тетради среднему сыну, у нее осталось $27 + 1 = 28$ (тетрадей), что составляет $\frac{2}{3}$ предпоследнего остатка. Значит, предпоследний остаток равен $28:2\cdot3 = 42$ (тетради) и после того, как мама отдала тетради старшему сыну, у нее осталось $42 + 1 = 43$ (тетради), что составляет $\frac{2}{3}$ первого остатка. Так как 43 – число нечетное, то $x \neq 10$.

Если $x = 20$, то последний остаток равен $x:2\cdot 3 = 20:2\cdot 3 = 30$ (тетрадей), следовательно, после того, как мама отдала тетради среднему сыну, у нее осталось $30 + 1 = 31$ (тетрадь), что составляет $\frac{2}{3}$ предпоследнего остатка. Так как 31 – число нечетное, то $x \neq 20$.

Таким образом, для x осталось одно возможное значение: $x = 14$. Если $x = 14$, то последний остаток равен $x:2\cdot 3 = 14:2\cdot 3 = 21$ (тетрадь), следовательно, после того, как мама отдала тетради среднему сыну, у нее осталось $21 + 1 = 22$ (тетради), что составляет $\frac{2}{3}$ предпоследнего остатка. Значит, предпоследний остаток равен $22:2\cdot 3 = 33$ (тетради) и после того, как мама отдала тетради старшему сыну, у нее осталось $33 + 1 = 34$ (тетрадей), что составляет $\frac{2}{3}$ первого остатка. Значит, первый остаток равен $34:2\cdot 3 = 51$ (тетрадь), следовательно, мама купила $51 + 1 = 52$ (тетради).

2 способ. Пусть мама купила y тетрадей, $(a + 1)$ тетрадь она отдала старшему сыну, $(c + 1)$ тетрадь – среднему сыну, $(x + 1)$ тетрадь – младшему сыну. Тогда имеем:

$$y = 3a + 1,$$

$$2a = 3c + 1,$$

$$2c = 3x + 1.$$

Умножим второе уравнение на 2 и подставим вместо $2c$ его выражение из третьего уравнения. Получим

$$4a = 3\cdot 2c + 2 = 3\cdot(3x + 1) + 2 = 9x + 5.$$

Теперь умножим первое уравнение на 4 и вместо $4a$ подставим полученное выражение. Тогда имеем

$$4y = 3\cdot 4a + 4 = 3\cdot(9x + 5) + 4 = 27x + 19.$$

Таким образом, получили уравнение $4y = 27x + 19$, где x и y – числа натуральное, причем, после того, как мама отдала тетради младшему сыну, у нее осталось $2x$

тетрадей, что по условию задачи составляет от 10 до 20 тетрадей, то есть $10 \le 2x \le 20$, значит, $5 \le x \le 10$.

Выразим из уравнения $4y = 27x + 19$ переменную y и выделим целую часть. Получим $y = \dfrac{27x+19}{4} = \dfrac{28x+20-x-1}{4} = 7x+5-\dfrac{x+1}{4}$. Так как x и y – числа целые, то $7x + 5$ – число целое, следовательно, $\dfrac{x+1}{4}$ – число целое. Обозначим, $m = \dfrac{x+1}{4}$, тогда $x = 4m - 1$, следовательно, $y = 7\cdot(4m - 1) + 5 - m = 27m - 2$. Таким образом, множество решений уравнения $4y = 27x + 19$ в целых числах имеет вид:

$$\begin{cases} x = 4m-1, \\ y = 27m-2; \end{cases} \text{ где } m \text{ – число целое.}$$

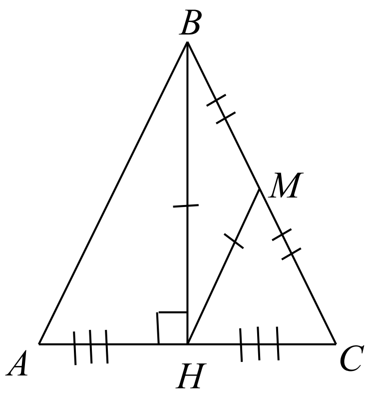
По условию $5 \le x \le 10$, то есть $5 \le 4m - 1 \le 10$; $6 \le 4m \le 11$; $1{,}5 \le m \le 2{,}75$. Так как m – число целое, то $m = 2$. При $m = 2$ $y = 27\cdot2 - 2 = 52$, то есть мама купила 52 тетради.

Ответ. 52 тетради было куплено.

Задача 5

Найти площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна отрезку, соединяющему середины основания и боковой стороны.

Решение



Пусть ΔABC – равнобедренный, $AB = BC$, $AC = 12$ см – основание, BH – высота, проведенная к основанию, M – середина BC.

Так как ΔABC – равнобедренный с основанием AC, BH – высота ΔABC, проведенная к основанию, то по свойству равнобедренного треугольника BH – медиана ΔABC, следовательно, H – середина AC. Тогда по условию задачи $MH = BH$.

Так как M – середина BC, H – середина AC, то MH – средняя линия ΔABC (по определению), тогда $MH = \frac{1}{2}AB$ (по свойству средней линии треугольника).

Пусть $MH = BH = x$ см, тогда $AB = 2x$ см. Так как H – середина AC, то $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$(см).

Рассмотрим ΔABH, $\angle AHB = 90°$ (так как BH – высота ΔABC). По теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2$, $4x^2 = 36 + x^2$, $3x^2 = 36$, $x^2 = 12$, $x = 2\sqrt{3}$ (см).

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см^2)

Ответ. $S_{ABC} = 12\sqrt{3}$ см^2.