## ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА

## (2019-2020 учебный год)

### Задание 1

#### Задача 1

Пусть положительные числа $a$, $b$, $c$ – последовательные члены арифметической прогрессии. Докажите, что числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

#### Решение

Найдём разности между соседними членами последовательности.

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}=\frac{b-a}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{c-b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

Эти числа равны, если $b–a=c–b$, то есть если $a$, $b$, $c$ – последовательные члены арифметической прогрессии.

#### Задача 2

Найдите область определения, множество значений и постройте график функции

$$y=3-\sqrt{21+4|x|-x^2}\ .$$

#### Решение

Область определения:

$$21+4|x|-x^2\geq 0,$$

$$|x|\leq 7,\ -7\leq x\leq 7.$$

Возведём в квадрат обе части равенства

$$\sqrt{21+4|x|-x^2}=3-y\ \ (y\leq 3):$$

$$21+4|x|-x^2=(3-y)^2,$$

$$(|x|-2)^2+(3-y)^2=25 \qquad (*)$$

Так как первое слагаемое неотрицательно,

$$|3-y|\le 5, \text{ то есть } -2\le y\le 8.$$

Окончательно, множество значений $-2\le y\le 3$.

При $x\ge 0$ (*) принимает вид

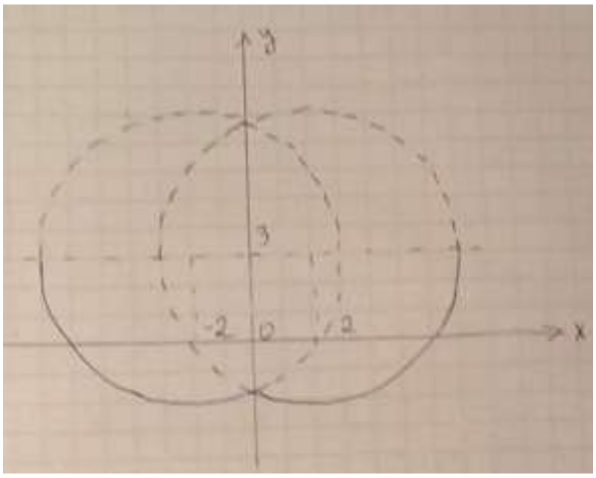
$$(x-2)^2+(3-y)^2=25$$

Это уравнение окружности с центром в точке (2,3) и радиусом 5.

При $x$<0 получаем

$$(x+2)^2+(3-y)^2=25$$

Это уравнение окружности с центром в точке (-2,3) и радиусом 5.




Ответ: область определения [-7;7], множество значений [-2;3].

**Задача 3**

По окружности в противоположных направлениях движутся с постоянными скоростями два тела. В начальный момент времени оба тела находились в точке $A$ и седьмая встреча этих тел произошла снова в точке $A$. Найдите, за сколько минут каждое из тел проходит полный круг, если известно, что первое из них тратит на это на 12 минут меньше, чем второе, при этом проходя круг не быстрее 31 минуты. Время прохода одного круга измеряется целым числом минут.

## Решение

Пусть первое тело тратит на обход круга $x$ минут, второе – $x$+12 минут, $x \geq 31$.

К седьмой встрече каждое тело обошло круг целое число раз (например, $n$ и $m$ соответственно), и совместно они обошли круг семь раз, то есть, $n + m = 7$. Для этого потребовалось время, равное

$$nx = m(x+12).$$

Таким образом,

$$2n(x+6) = 7(x+12)$$

$$(2n-7)x = 12(7-n).$$

Правая часть равенства положительна, поэтому левая тоже должна быть положительна, следовательно,

$$4 \leq n \leq 6$$

При $n$=4 $x = 36$,

при $n$=5 $3x = 24$, $x$=8,

при $n$=6 $5x = 12$

Условиям задачи удовлетворяет $x = 36$.

Ответ: 36 минут и 48 минут.

## Задача 4

Найдите наибольший член последовательности

$$a_n = -n^2 + 4n - 5 + \frac{12}{(2n-7)^2 + 3}, \quad n = 1,2,...$$

## Решение

Запишем общий член последовательности в виде

$$a_n = -(n-2)^2 - 1 + \frac{12}{(2n-7)^2 + 3}.$$

Функция $y = -(x-2)^2$ возрастает при $x \leq 2$ и убывает при $x \geq 2$, функция $y = \dfrac{12}{(2x-7)^2 + 3}$ возрастает при $x \leq 7/2$ и убывает при $x \geq 7/2$. Таким образом, при $n \leq 2$ члены последовательности возрастают, а начиная с четвертого убывают.

$$a_2 = -1 + \frac{12}{9+3} = 0,$$

$$a_3 = -1 - 1 + \frac{12}{1+3} = 1,$$

$$a_4 = -4 - 1 + \frac{12}{1+3} = -2$$

Ответ: $a_{\max} = a_3 = 1$.

**Задача 5**

Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Точка *P* лежит на стороне *AB*, причем *DP*||*BC*, *PC*||*AD*. Найти длины отрезков *AP* и *BP*, если *DC*=10, *AB*=29.

**Решение**

Так как *DP*||*BC*, $\angle DPC = \angle PCB$, так как *PC*||*AD*, $\angle DPC = \angle PDA$.

Поскольку четырехугольник *ABCD* вписан в окружность, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то есть $\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \angle ADP - \angle PDC = \angle PCD$.

Аналогично, $\angle BAD = \angle PDC$.

Таким образом, треугольники *ADP* и *CPD*, *CPD* и *PCB* подобны.

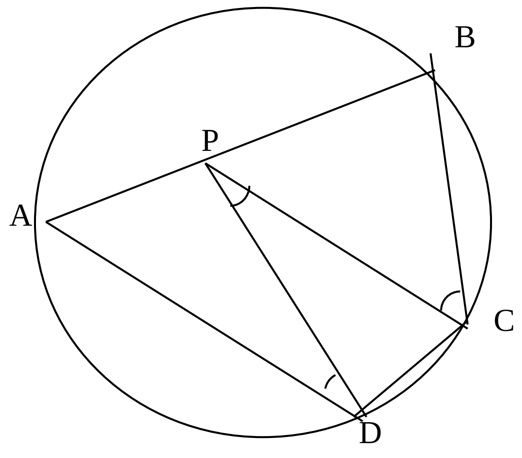
Пусть *AP*=*x*, тогда *BP*=29–*x*,

$$\frac{x}{10} = \frac{PD}{PC}, \ \frac{29-x}{10} = \frac{PC}{PD},$$

$$x(29-x) = 100,$$

$$x^2 - 29x + 100 = 0,$$

$$x = 4 \text{ или } x = 25.$$




Ответ: 4 и 25.