Задание № 2

Задача 1

Найдите сумму 1+11+111+…+111…111 (в последнем слагаемом *n* цифр).

Решение

Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$S = 1 + (1+10) + (1+10+100) + \ldots + \left(1+10+\ldots+10^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} = \frac{10+10^2+\ldots+10^n-n}{9} = \frac{10\left(10^n-1\right)-9n}{81}.$$

Ответ: $\frac{10\left(10^n-1\right)-9n}{81}$

Задача 2

Среди решений системы

$$\begin{cases} y - x \le 1 \\ x^2 + y^2 + 2x + 6y \le 26 \end{cases}$$

найти те, для которых значение $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10$ минимально.

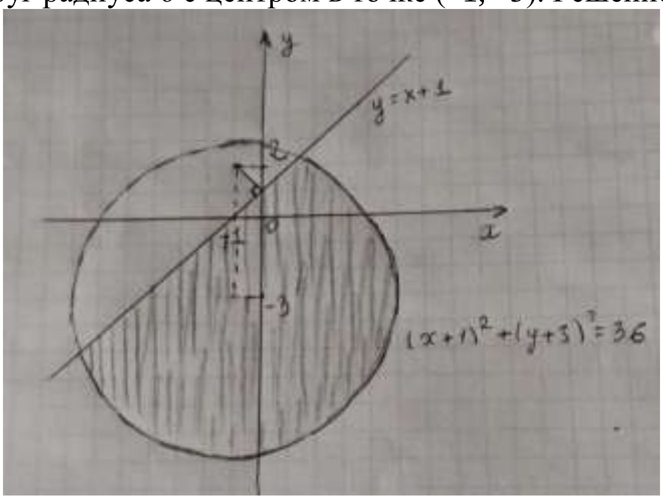
Решение

На плоскости $x0y$ первое неравенство системы определяет полуплоскость под прямой $y = x + 1$.

Второе неравенство перепишем в виде

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 \le 36$$

Это круг радиуса 6 с центром в точке (–1, –3). Решение системы показано штриховкой.



Величина

$$A = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + 5$$

представляет собой увеличенный на 5 квадрат расстояния от точки с координатами (*x*,*y*) до точки с координатами (–1,2). Поэтому значение *A* минимально для решения системы, которому соответствует ближайшая к точке (–1,2) точка заштрихованной области. Эта точка лежит на прямом участке границы области,

$$A = (x+1)^2 + (y-2)^2 + 5 = y^2 + y^2 - 4y + 4 + 5 = 2(y-1)^2 + 7$$

принимает наименьшее значение при *y*=1 (тогда *x*=0).

Ответ: x=0, y=1.

Задача 3

В январе 2014 года взяли в кредит 1 млн. рублей под 12% годовых на пять лет. Часть денег была отложена, чтобы ежегодно гасить проценты по кредиту. На оставшиеся деньги были куплены доллары США по курсу 33 рубля за один доллар, а на половину этих долларов - биткоины (BTC) по курсу 750 долларов за 1 BTC. 1 января 2019 года биткоины были проданы по цене 3742 долларов США за один BTC, а доллары - по курсу 69 рублей за один доллар. Найдите прибыль.

Решение

Проценты по кредиту составляют 120 тысяч рублей ежегодно. Следовательно, была отложена сумма 600 тысяч рублей.

$\frac{400000}{33} = 12121,(21)$. Был куплен 12121,21 доллар (осталось 7 копеек).

$\frac{12121,21}{2\cdot 750} = 8,08080(6)$. Считаем, что было куплено 8,0808 BTC, то есть осталось 6060,61 долларов.

От продажи биткоинов получено 30238,35 долларов, то есть всего было продано затем 36298,96 долларов, и выручка составила 2504628,24 рубля. После погашения кредита осталось 1504628 рублей и 31 копейка.

Ответ: 1504628,31 рублей.

Задача 4

Определите количество решений уравнения $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ в зависимости от параметра a.

Решение

Раскрывая модули в левой части уравнения, мы можем получить

$$4x - (3x - (x + a)) = 2x + a,$$

$$4x - (3x + (x + a)) = -a,$$

$$4x + (3x - (x + a)) = 6x - a,$$

$$4x + (3x + (x + a)) = 8x + a.$$

Правая часть уравнения равна $9x - 27$ при $x \ge 3$ и $27 - 9x$ при $x < 3$.

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = 9|x - 3| - 4x + |3x - |x + a||$$

Её график – ломаная линия, причём угловой коэффициент отрезков положительный при $x > 3$ и отрицательный при $x < 3$.

Таким образом, при $x < 3$ функция монотонно убывает, при $x > 3$ монотонно возрастает. Наименьшее значение функции $y_0 = f(3) = -12 + |9 - |3 + a||$. Рассмотрим возможные случаи.

$y_0 = 0$. Уравнение имеет единственное решение (x=3).

$$|9 - |3 + a|| = 12$$

$$9 - |3 + a| = 12 \text{ или } 9 - |3 + a| = -12$$

$$-|3 + a| = 3 \text{ или } |3 + a| = 21$$

a=18 или a=–24.

$y_0 < 0$. Уравнение имеет два корня (один больше 3, второй – меньше 3).

$$\left|9-|3+a|\right| < 12,$$
$$-24 < a < 18$$

$y_0 > 0$. Уравнение решений не имеет.

Ответ: при a=18 и a=–24 одно решение, при $-24 < a < 18$ два решения, при $a < -24$ и $a > 18$ решений нет.

Задача 5

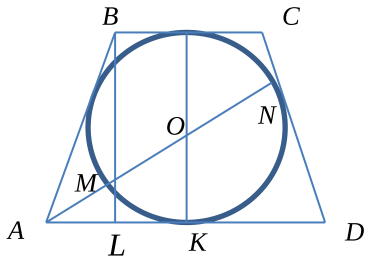
В равнобедренную трапецию *ABCD* с большим основанием *AD* вписана окружность с центром в точке *O*. Прямая *AO* пересекает окружность в точках *M* и *N* так, что *AM*:*MN*=1:4. Найдите радиус окружности, если площадь трапеции равна $180\sqrt{5}$.

Решение

Пусть *AM*=*x*. Тогда *NM*=4*x*, радиус окружности *R*=*MO*=*OK*=2*x*, высота трапеции *h*=2*R*=4*x*. По теореме о касательной и секущей находим

$$AK^2 = AM \cdot AN = x \cdot 5x = 5x^2,\ AD = 2AK = 2\sqrt{5}x.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABL*. Так как трапеция равнобедренная и в неё можно вписать окружность, $AB = \dfrac{BC+AD}{2}$, $AL = \dfrac{AD-BC}{2}$.



$$AB^2 - AL^2 = BL^2,\ BC \cdot AD = BL^2,\ BC = \frac{16x^2}{2\sqrt{5}x} = \frac{8\sqrt{5}}{5}x.$$

Площадь трапеции равна

$$\frac{AD+BC}{2}h = \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}x + 2\sqrt{5}x\right) \cdot 2x = \frac{36\sqrt{5}}{5}x^2 = 180\sqrt{5}.$$

Таким образом, x=5, R=10.

Ответ: 10.