Задание № 1

Задача 1

Может ли сумма цифр точного квадрата (то есть квадрата некоторого натурального числа) быть равной 2019? (ответ обосновать)

Решение

Сумма цифр числа 2019 равна 2 + 0 + 1 + 9 = 12, 12 делится на 3, но не делится на 9, следовательно, согласно признакам делимости на 3 и на 9, 2019 делится на 3 и не делится на 9. Тогда и точный квадрат, сумма цифр которого, согласно предположению, равна 2019, должен делиться на 3 и не делиться на 9.

Обозначим за x – число, сумма цифр квадрата которого по условию задачи равна 2019. Тогда x^2 делится на 3 и не делится на 9. Так как 3 – число простое, то из того, что x^2 делится на 3, следует, что x делится на 3, то есть $x = 3p$, где p – число натуральное. Тогда $x^2 = (3p)^2 = 9p^2$, значит, x^2 делится на 9, что невозможно, так как сумма его цифр на 9 не делится. Получили противоречие, следовательно, сумма цифр точного квадрата не может быть равна 2019.

Ответ. Не может.

Задача 2

Лекарственная ромашка теряет при сушке 84% массы. Сколько килограммов ромашки нужно собрать, чтобы получить 8 кг сухого растения?

Решение

Так как при сушке ромашка теряет 84% массы, то количество сухого растения составляет 100% – 84% = 16% или 0,16 от массы собранной ромашки.

Тогда для того, чтобы получить 8 кг сухой ромашки, нужно собрать 8 : 0,16 = 50 (кг) лекарственной ромашки.

Ответ. 50 кг.

Задача 3

Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня – на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Решение

Пусть тест содержит x вопросов. Тогда Петя на выполнение теста затратит $\frac{x}{8}$ часов, а Ваня – $\frac{x}{9}$ часов. Так как скорость выполнения теста Ваней выше, чем Петей, то Ваня закончит выполнение теста на $\left(\frac{x}{8}-\frac{x}{9}\right)$ часа раньше, чем Петя, что по условию задачи составляет 20 минут или $\frac{1}{3}$ часа. Получаем уравнение:

$$\frac{x}{8}-\frac{x}{9}=\frac{1}{3}.$$

Умножим обе части уравнения на 72, получим

$$9x - 8x = 24;$$

$$x = 24.$$

Таким образом, получили, что тест содержит 24 вопроса.

Ответ. 24 вопроса.

Задача 4

Белка за 20 мин приносит орех в гнездо. Далеко ли от орешника ее гнездо, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м в секунду, а с орехом 3 м в секунду (на срывание ореха времени не затрачивает)?

Решение

Пусть расстояние от гнезда до орешника равно x м. Тогда на путь от гнезда до орешника белка затрачивает $\frac{x}{5}$ секунд, а от орешника до гнезда – $\frac{x}{3}$ секунды. Всего на путь от гнезда до орешника и обратно белка затрачивает $\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{3}\right)$секунды, что по условию задачи составляет 20 минут или $20 \cdot 60 = 1200$ (секунд). Получаем уравнение:

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=1200.$$

Умножим обе части уравнения на 15. Получим

$$3x + 5x = 1200 \cdot 15;$$

$$8x = 1200 \cdot 15;$$

$$x = 150 \cdot 15;$$

$$x = 2250.$$

Таким образом, расстояние от гнезда белки до орешника равно 2250 м или 2 км 250 м.

Ответ. 2 км 250 м.

Задача 5

Сумма номеров домов на одной стороне квартала 156. Один из этих домов имеет номер 14. Каким номером начинается та же сторона следующего квартала?

Решение

Выведем сначала формулу для вычисления суммы n первых натуральных чисел. Пусть $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$. Запишем ту же сумму, но слагаемые в ней запишем в обратном порядке, получим, $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$. Сложим оба получившихся равенства, причем, слагаемые в правых частях сложим почленно, то есть первое с первым, второе со вторым и т.д. Получим:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 \end{array} \\ \hline 2S_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) \end{array}$$

В правой части равенства получили n одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $n + 1$, следовательно, $2S_n = n\cdot(n + 1)$, откуда окончательно получаем формулу $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Так как, по условию задачи, один из домов квартала имеет номер 14, то на рассматриваемой стороне квартала все дома имеют четный номер. Пусть первый дом квартала имеет номер x ($x \le 14$), а всего в квартале n домов. Номер каждого следующего дома стороны квартала на два больше, чем номер предыдущего дома этой стороны квартала, тогда номер первого дома – x, второго – $x + 2$, третьего – $(x + 2) + 2 = x + 2\cdot2$, четвертого – $x + 2\cdot3$, …, последнего (n-го) – $x + 2\cdot(n-1)$. Найдем сумму номеров домов на рассматриваемой стороне квартала:

$$x + (x + 2) + (x + 2\cdot2) + (x + 2\cdot3) + \ldots + (x + 2\cdot(n-1)) =$$
$$= x\cdot n + 2\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)).$$

В силу выведенной выше формулы $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$, следовательно, сумма номеров домов на рассматриваемой стороне квартала будет равна

$$x + (x + 2) + (x + 2\cdot2) + (x + 2\cdot3) + \ldots + (x + 2\cdot(n-1)) = x\cdot n + 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} =$$

$$= x \cdot n + (n - 1) \cdot n.$$

По условию задачи $x \cdot n + (n - 1) \cdot n = 156$, причем, чем больше домов на этой стороне квартала, тем меньше номер первого дома стороны квартала. Кроме того, количество домов на этой стороне квартала больше 1, так как сумма номеров домов больше, чем номер одного из домов на этой стороне квартала. С другой стороны, так как $12 \cdot 13 = 156$, а произведение $x \cdot n$ – число положительное, то количество домов на рассматриваемой стороне квартала не превышает 12. Для определения значения x составим таблицу:

n	$(n - 1) \cdot n$	$x \cdot n$	x	Проверка условия: x натуральное, $x \leq 14$
2	2	156 – 2 = 154	77	77 > 14
3	6	156 – 6 = 150	50	50 > 14
4	12	156 – 12 = 144	36	36 > 14
5	20	156 – 20 = 136		136 не делится на 5
6	30	156 – 30 = 126	21	21 > 14
7	42	156 – 42 = 114		114 не делится на 7
8	56	156 – 56 = 100		100 не делится на 8
9	72	156 – 72 = 84		84 не делится на 9
10	90	156 – 90 = 66		66 не делится на 10
11	110	156 – 110 = 46		46 не делится на 11
12	**132**	**156 – 132 = 24**	**2**	**2 ≤ 14, условие выполнено**

Условие задачи выполняется только в одном случае: когда номер первого дома на рассматриваемой стороне квартала равен 2 и сторона квартала содержит 12 домов. Тогда номер последнего дома на этой стороне квартала равен $x + 2 \cdot (n - 1) = 2 + 2 \cdot (12 - 1) = 2 + 2 \cdot 11 = 24$, следовательно, та же сторона следующего квартала начинается с дома, номер которого 26.

Ответ. 26.