ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2019-2020 учебный год)

Задание 1

1) Пусть положительные числа a, b, c – последовательные члены арифметической прогрессии. Докажите, что числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

2) Найдите область определения, множество значений и постройте график функции

$$y=3-\sqrt{21+4|x|-x^2}\ .$$

3) По окружности в противоположных направлениях движутся с постоянными скоростями два тела. В начальный момент времени оба тела находились в точке A и седьмая встреча этих тех произошла снова в точке A. Найдите, за сколько минут каждое из тел проходит полный круг, если известно, что первое из них тратит на это на 12 минут меньше, чем второе, при этом проходя круг не быстрее 31 минуты. Время прохода одного круга измеряется целым числом минут.

4) Найдите наибольший член последовательности

$$a_n=-n^2+4n-5+\frac{12}{(2n-7)^2+3},\ n=1,2,...$$

5) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка P лежит на стороне AB, причем $DP\|BC$, $PC\|AD$. Найти длины отрезков AP и BP, если DC=10, AB=29.

Задание 2

1) Найдите сумму 1+11+111+…+111…111 (в последнем слагаемом n цифр).

2) Среди решений системы

$$\begin{cases} y-x\le 1 \\ x^2+y^2+2x+6y\le 26 \end{cases}$$

найти те, для которых значение $x^2+y^2+2x-4y+10$ минимально.

3) В январе 2014 года взяли в кредит 1 млн. рублей под 12% годовых на пять лет. Часть денег была отложена, чтобы ежегодно гасить проценты по кредиту. На оставшиеся деньги были куплены доллары США по курсу 33 рубля за один доллар, а на половину этих долларов - биткоины (BTC) по курсу 750 долларов за 1 BTC. 1 января 2019 года биткоины были проданы по цене 3742 долларов США за один BTC, а доллары - по курсу 69 рублей за один доллар. Найдите прибыль.

4) Определите количество решений уравнения $4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-3|$ в зависимости от параметра a.

5) В равнобедренную трапецию $ABCD$ с большим основанием AD вписана окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает окружность в точках M и N так, что AM:MN=1:4. Найдите радиус окружности, если площадь трапеции равна $180\sqrt{5}$.

Задание 3

1) Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(2x+y)^2=7+z^2\\(y-z)^2=4+4x^2\\(2x-z)^2=5+y^2\end{cases}$$

3) В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой ёмкости было 1440 кг смеси, а во второй – 2560 кг. В обе ёмкости добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в первой ёмкости и в l раз во второй. О числах k и l известно только, что kl=9-k. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе ёмкости вместе.

4) При всех значениях параметра a решите неравенство

$$\left(ax^2+2+\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)<1$$

5) Вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты (x, 1-x), вектор $\boldsymbol{b}$ – координаты $\left(x^2-2x, x^2-2x+1\right)$. При каких значениях x векторы а) коллинеарны; б) одинаково направлены; в) ортогональны?

Задание 4

1) Имеется m книг в черных переплетах и n – в синих, все книги разные. Сколько существует способов расставить книги на полке, чтобы все книги в черных переплетах стояли рядом?

2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x\sqrt{3y+3}+y\sqrt{3x+3}=2\sqrt{x+y+2}\\3x^2+3y^2=4\end{cases}$$

3) Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов. Один килограмм первого корма стоит 80 ден. ед. и содержит 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов. Один килограмм второго корма стоит 10 ден. ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов. Составьте наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед.

4)При каком наименьшем натуральном n число 2020! не делится на n^n?

5) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно. Докажите, что точка E есть центр вневписанной окружности для треугольника OCB, где O – точка пересечения прямых CD и AB. Найдите

площадь пятиугольника *ABCDE*, если угол *A* равен 38° , угол *D* равен 142°, а площадь треугольника *BCE* равна 13.

Задание 5

1) Из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2+4x+q=0$. Какова вероятность, что это уравнение а) не имеет корней, б) имеет один действительный корень, в) корни уравнения – рациональные числа?

2) Решите уравнение

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0.$$

3) В начале года строительная фирма выбирает банк для получения кредита среди нескольких банков, кредитующих под разные проценты. Полученным кредитом фирма планирует распорядиться следующим образом: три четверти кредита направить на строительство коттеджей, а остальные деньги - на оказание риэлтерских услуг населению. Первый проект может принести прибыль в размере от 35% до 41% годовых, а второй – от 20% до 24% годовых. В конце года фирма должна вернуть кредит банку с процентами и при этом рассчитывает на чистую прибыль от указанных видов деятельности не менее 14%, но и не более 21% годовых от всего полученного кредита. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования выбираемых банков (равные целому числу процентов), чтобы фирма гарантированно обеспечила себе указанный выше уровень прибыли?

4) Решите ребус. Буквы и звёздочки обозначают цифры от 0 до 9 (*З*≠0). Различные буквы соответствуют различным цифрам.

```
    ЗИМА
    ЗИМА
   *****
  *****
 *****
*****
****ЗИМА
```

5) Какую фигуру образует множество ортоцентров (точек пересечения высот) всех треугольников, имеющих общую сторону, при условии, что углы, противолежащие этой стороне, равны?